物理学I、II

近藤　康 *

平成12 年 9 月 14 日

概 要

- 近似の学問：例えば、ニュートン力学とアインシュタインの相対性理論
- 抽象思考そして具体的思考の学問
- 役に立つ学問

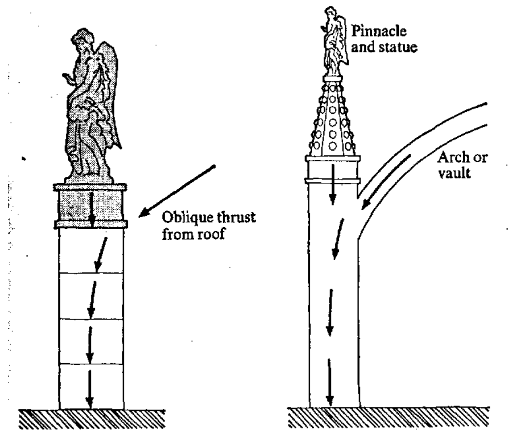


Figure 10. This can be done by adding top weight in the form of pinnacle, statues etc.

*Email:kondo@phys.kindai.ac.jp

第1章　質点の力学

1.1　質点の運動

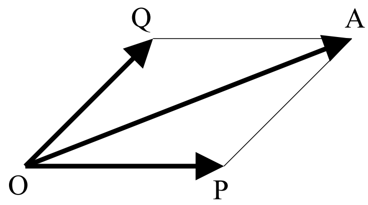
質点（質量：有、大きさ：無）$\rightarrow$ 抽象化の一例（例えば、太陽系の中の惑星）また、「大きさのある物体 $\approx$ 質点の集合体」と考えることができる。

1.2　ベクトル

変位、力、などのように「大きさ」と「方向」を持ち、
加法（大きさ）については「平行四辺形の法則」が成り立ち、そして
スカラー倍（c倍）できるもの。

- $c > 0$: 向きが同じ
- $c < 0$: 向きが逆

で大きさが $|\,c\,|$ 倍。

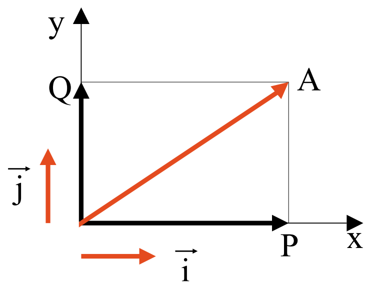


平行四辺形の法則

成分表記（簡単のために2次元の場合を考える）

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \\
&= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} \\
&= (A_x, A_y)
\end{aligned}
$$

$$\overrightarrow{OA} \text{の大きさ} \quad = \quad |\,\overrightarrow{OA}\,| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$



ベクトルの成分表示

3次元では？

1.3　微分の復習

極限

- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ の意味は？
- 以下の計算をせよ。

$$\lim_{x \to 0} 1 + x \quad =$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} 1+x^2+x^3 &= \\ \lim_{x\to 0} x/x &= \\ \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+x^3}{x} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= \\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \end{aligned}$$

$x=0$で定義されていない！

微分
拡張された傾きの概念。

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- 重要な公式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} \\ \frac{d}{dx}\sin x &= \cos x \\ \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}e^x &= e^x \\ \frac{d}{dx}\ln x &= 1/x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) &= (\frac{d}{dx}f(x))g(x)+f(x)(\frac{d}{dx}g(x)) \\ \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{(\frac{d}{dx}f(x))g(x)-f(x)(\frac{d}{dx}g(x))}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

- 合成関数の微分　$y=f(x),\ x=g(t) \Rightarrow y=f(g(t))$である時、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

微分の定義に従って以下の関数の微分を行う。

-
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^2 &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} \\ &= 2x\end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x^n+n\Delta x x^{n-1}+\text{定数}\Delta x^2x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+\Delta x^n)-x^n}{\Delta x} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}a^x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} \\ &= a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \end{aligned}$$

  特に $\lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)/(\Delta x)=1$ となる a を自然対数の底 e と呼ぶ。$e=2.718...$

- 自然対数の微分

  $y=e^x$ と $y=\ln x$ はお互いに逆関数の関係にある。よって、$x=\ln y \quad (y=e^x)$ を y で微分すると

  $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$$

  ここで $x\to y, y\to x$ と置き換えることによって

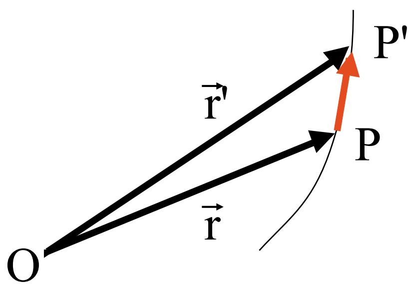
  $$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

  が得られる。

1.4 位置ベクトル、速度、そして加速度：微分の応用

- 速度

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}\right) \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= \left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\vec{r} \end{aligned}$$



$$\Delta\vec{r}=\overrightarrow{PP'}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$

- 加速度

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}$$

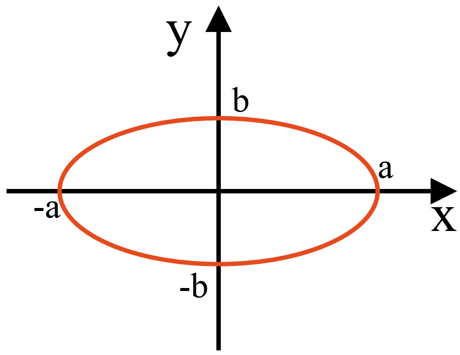
例：位置ベクトルが以下のように表されているとき、

$$\vec{r} = (x, y) = (a\cos\omega t, b\sin\omega t)$$

t は時間 (時刻)。この運動の軌道の方程式は

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

すなわち、軌道は楕円になる。



速度 $\vec{v}$、加速度 $\vec{a}$ を考えると

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(-a\sin\omega t, b\cos\omega t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2(a\cos\omega t, b\sin\omega t) = -\omega^2\vec{r}$$

特に $a = b = r_0$ の場合、等速円運動

$$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{\omega^2 r_0^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \omega r_0$$

$$|\ \vec{a}\ | = \omega^2 r_0 = \frac{v^2}{r_0}$$

1.5 力と慣性

- ニュートンの運動の第一法則（慣性の法則）

  力が存在しなければ静止または等速度運動を行う。

- ニュートンの運動の第二法則（ニュートンの運動方程式）

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

  ここで $\vec{F}$ は物体に作用する力、$\vec{a}$ は物体に生じる加速度、そして m は比例定数（質量と呼ぶ)。

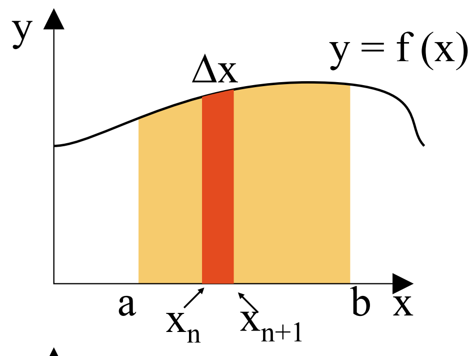
- 重力質量

  測定限界内で慣性質量と重力質量（万有引力の起源となる物体固有の量）は比例する。

1.6 関数の積分

- 定積分

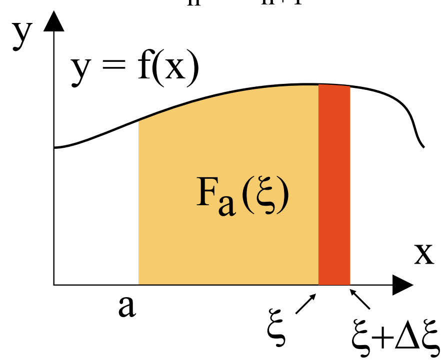
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a<x_n<b} f(x_n)\Delta x$$



- 不定積分

$$F_a(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx \text{ と定義する。}$$

$$\begin{aligned} F_a(\xi) &= F_a(\xi) + f(\xi)\Delta\xi \\ &\Downarrow \\ \frac{F_a(\xi+\Delta\xi) - F_a(\xi)}{\Delta\xi} &= f(\xi) \\ &\Downarrow \quad \Delta\xi \to 0 \\ \frac{d}{d\xi}F_a(\xi) &= f(\xi) \end{aligned}$$



すなわち、$\frac{d}{dx}F_a(x) = f(x)$。

注意：$\frac{d}{dx}(F_a(x)+c) = f(x)$、ただし c は任意定数。

1.7 運動方程式の解：積分の応用

- 概念

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{\vec{F}(t)}{m}dt \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt$$

- 例１：放物運動

初期条件（$\vec{r}(0) = \vec{0}$、$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$）で重力 $\vec{F}(t) = (0, -mg)$ が常に作用している物体の運動を考える。

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \frac{\vec{F}(t)}{m}dt = \int_0^t (o, -g)dt = (c_1, c_2 - gt)$$

初期条件より $c_1 = v_{0x}$、$c_2 = v_{0y}$。すなわち、

$$\vec{v}(t) = (v_{0x}, v_{0y} - gt)$$

同様にもう一度積分すると

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt = (c_3 + v_{0x}t, c_4 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)$$

ただし、初期条件より $c_3 = c_4 = 0$。よって

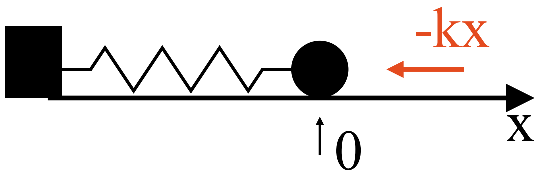
$$\vec{r}(t) = (v_{0x}t, v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)$$

- 例２：単振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

あるいは

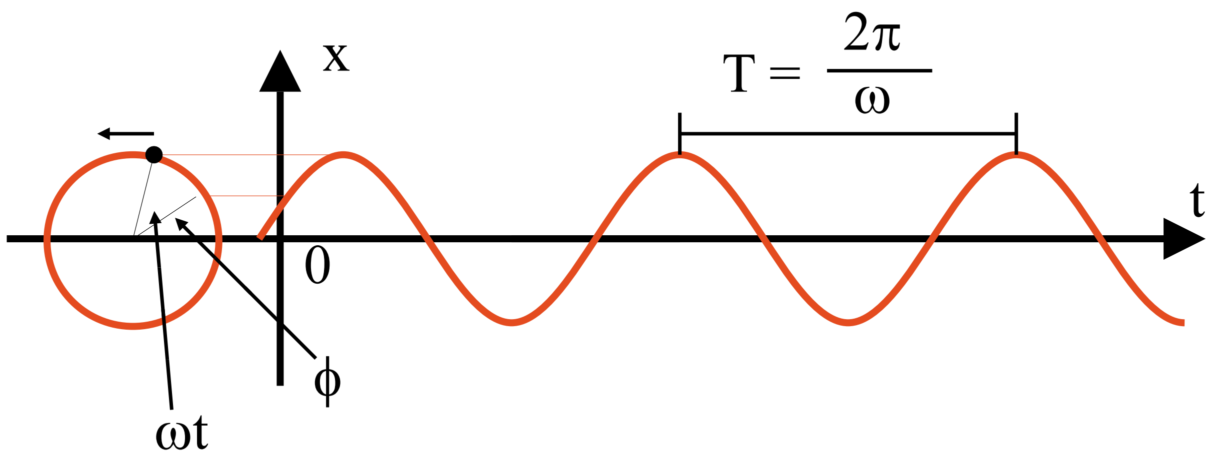
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



この方程式の解は

$$x = c\sin(\omega t + \phi)$$

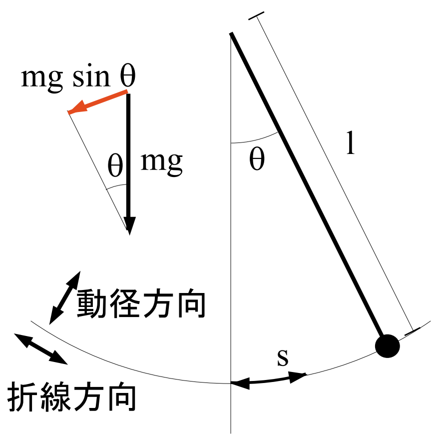
ここで c は振幅、ϕ は位相、ω は角振動数である。また周期 T を $\omega T = 2\pi$ と定義し、振動数 ν（f を使うこともよくある）を $\nu = 1/T$ で定義する。



- 例３：単振り子

動径方向の運動はなく、接線方向のみ考えればよい。
円弧に沿った長さ s を定義すると

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$



一方、重力の接線方向の成分は

$$F = -mg\sin\theta$$

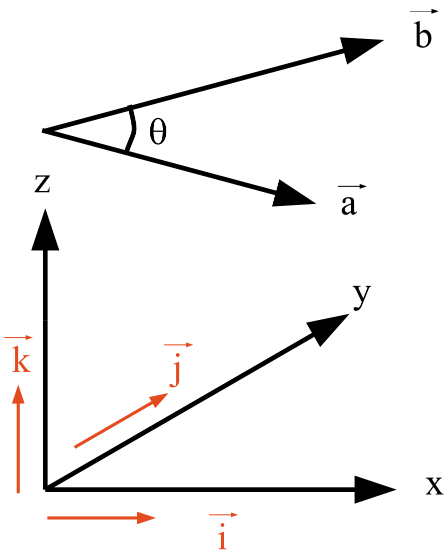
よって運動方程式は

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$s = \ell\theta$ であることと、$\theta \sim 0$ の時の近似式 $\sin \sim \theta$ を用いて

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

1.8　ベクトルのスカラー積



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

重要な性質、

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

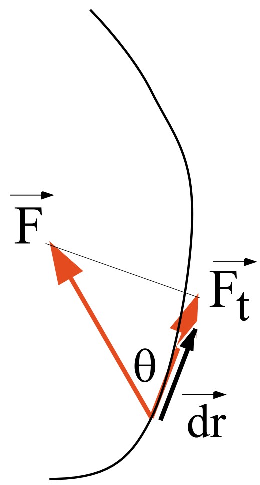
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ならば成分表記によって、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\text{、}\qquad \text{特に}\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$\text{また、}\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\frac{d}{dt}\vec{a})\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot(\frac{d}{dt}\vec{b})$$

1.9　運動エネルギーと仕事

1.9.1　スカラー積の応用



運動エネルギー $KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}KE &= \frac{1}{2}m(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}) \\ &= (m\frac{d\vec{v}}{dt})\cdot\vec{v} \\ &= \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\end{aligned}$$

両辺に dt を掛けると

$$dKE = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

力のした仕事はその間における運動エネルギーの変化に等しい。

1.9.2　例

時刻 $t = 0$ において高さ $z = 0$、初速度が上向きに $v = v_0$ の物体の運動を一様下向きな重力場 (-mg) の下で考える。

$$\text{運動方程式} : m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -mg$$

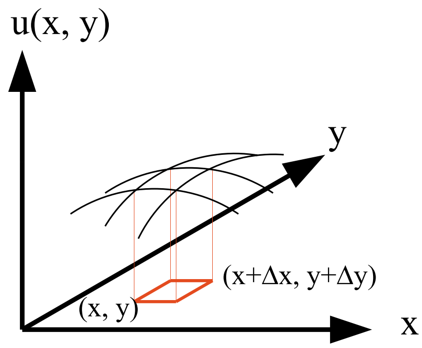
$$\text{解}: v(t) = v_0 - gt, z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g(t - \frac{v_0}{g})^2 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

エネルギーの収支

最初の運動エネルギー $= \frac{1}{2}mv^2$、　　最高点での運動エネルギー $= 0$

最高点に達するまでに重力のした仕事 $= (mg)(\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}) = \frac{1}{2}mv_0^2$

1.10 偏微分：多変数の関数への微分の拡張



２変数の関数 $u = f(x, y)$ を考え、$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}
\end{aligned}$$

$(x, y) \to (x + \Delta x, y + \Delta y)$ の時の u の変化を考える。

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\
&= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) \\
&\approx \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y
\end{aligned}$$

ここで $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ の極限を考える。

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

1.11 ポテンシャルと保存力

$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ と表すことができる時、$\vec{F}$を保存力､U をそのポテンシャル と言う。

あるいは $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$、ここで $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x})$ と書くこともある。

$$\begin{aligned}
\text{保存力による仕事} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -\int_A^B \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \\
&= -\int_A^B dU \\
&= U(A) - U(B)
\end{aligned}$$

すなわち保存力による仕事は動かした道筋によらない。

1.12 力学的エネルギーの保存

保存力しか作用しない場合、

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -U(B) + U(A)$$

$$\text{すなわち、}\qquad \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B) = \frac{1}{2}mv_A^2 + U(A)$$

運動エネルギーとポテンシャル（特に位置エネルギー）の和は一定。

1.12.1 重力：保存力の例１

重力 $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ を与えるポテンシャルは $U = mgz + const. \Leftrightarrow -\vec{\nabla}U = \vec{F}$

$$\text{注意：}\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

ジェットコースターを思い出すように。

1.12.2 バネの力：保存力の例２

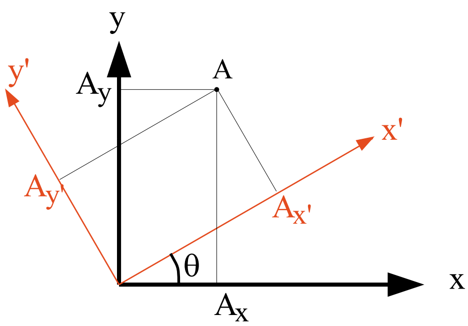
バネの力は $F = -kx$、ポテンシャル（位置エネルギー）を求めるために力を積分すると

$$U(x) - U(0) = \int_0^x -F dx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U(0) = 0\text{ とおいて、}U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

力学エネルギー保存は $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$。

1.13 座標変換（２次元）



$O - xy$ 系での x 方向の単位ベクトル

$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $O - x'y'$ 系では $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

$O - xy$ 系での y 方向の単位ベクトル

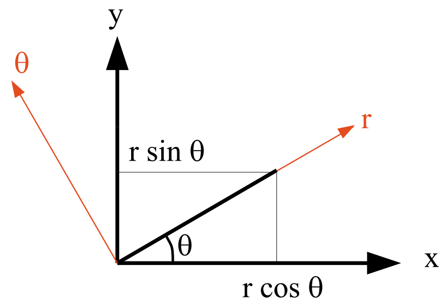
$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $O - x'y'$ 系では $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

よって、$O - xy$ 系で $\overrightarrow{OA} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} = A_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は

$O - x'y'$ 系では$\overrightarrow{OA} = A_x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + A_y\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\text{以上まとめると、}\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

1.13.1　極座標表示（２次元）



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

$O - xy$ 系から $O - r\theta$ 系への速度ベクトルの変換は

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ r\frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$$

同様にして加速度ベクトルの変換は

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt}) \end{pmatrix}$$

1.13.2　面積速度一定：極座標表示の応用

万有引力が作用している場合、

	r 方向	θ方向
作用している力	$F_r = -G\frac{M\cdot m}{r^2}$	$F_\theta = 0$
運動方程式	$-G\frac{M\cdot m}{r^2} = m(\frac{d^2}{dt^2}r - r(\frac{d\theta}{dt})^2)$	$0 = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt})$

⋆ θ 方向の運動方程式より $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = const \Leftrightarrow$ 面積速度一定。

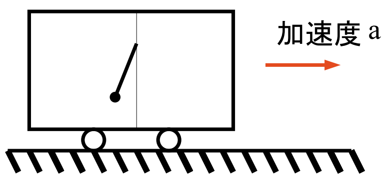
1.14　慣性系

- 慣性系とは $\vec{F} = m\vec{a}$ が成立する座標系。
- ガリレイ変換 $\Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r'} + \vec{x_0}$ ただし $\vec{x_0} = \vec{v}\cdot t + \vec{c}$ によって慣性系を新しい座標系に変換した場合、その新しい座標系も慣性系になる。
- 非慣性系においては見かけの力が作用する。

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{x_0} = \vec{A_0} \neq \vec{0}, \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r'} + \vec{A_0} \Longrightarrow m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r'} = \vec{F} - m\vec{A_0}$$

1.14.1　電車の中の力学：非慣性系の例１

加速度 a で $+x$ 方向に運動している電車の中では質量 m の物体には下向きの重力 mg だけではなく $-x$ 方向に ma の見かけの力が作用している。

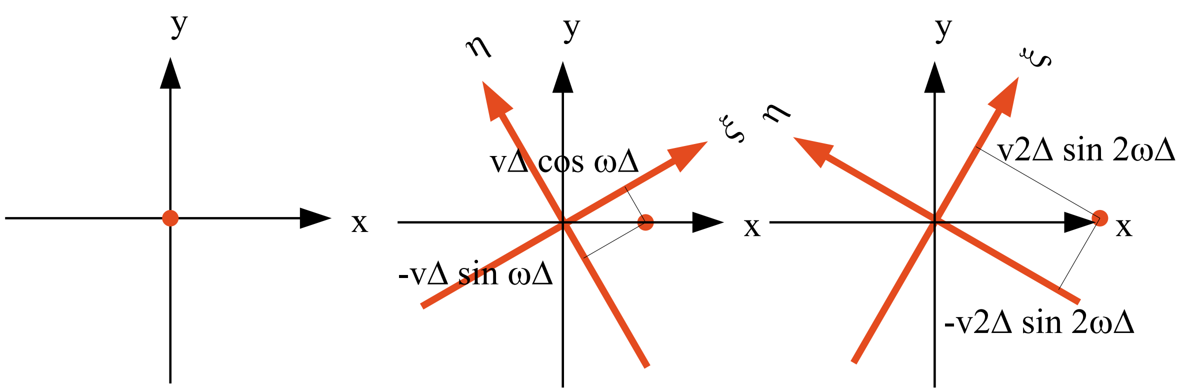


1.15　回転座標系：非慣性系の例２、コリオリ力と遠心力

慣性系
等速度運動＝力が作用していない

回転座標系
見かけ上等速度運動ではない＝見かけの力が作用している

1.15.1　コリオリ力を微分の原理より考える



$time$	$t=0$	$t=\Delta$	$t=2\Delta$
ξ	0	$v\Delta\cos\omega\Delta$	$2v\Delta\cos 2\omega\Delta$
η	0	$-v\Delta\sin\omega\Delta$	$-2v\Delta\sin 2\omega\Delta$

ξ 方向と η 方向の速度は速度の定義より

$$\xi\text{方向：}\quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{v\Delta\cos\omega\Delta - 0}{\Delta} = v$$
$$\eta\text{方向：}\quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{-v\Delta\sin\omega\Delta - 0}{\Delta} = 0$$

同様に ξ 方向と η 方向の加速度は $\dfrac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{\Delta\to 0}\dfrac{f(t+2\Delta) - 2f(t+\Delta) + f(t)}{\Delta^2}$ を用いて、

$$\xi\text{方向}\quad:\quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{2v\Delta\cos 2\omega\Delta - 2v\Delta\cos\omega\Delta}{\Delta^2} = 0$$
$$\eta\text{方向}\quad:\quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{-2v\Delta\sin 2\omega\Delta - 2(-v\Delta\sin\omega\Delta)}{\Delta^2} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{-2v(\sin 2\omega\Delta - \sin\omega\Delta)}{\Delta} = -2v\omega$$

1.15.2 一般の場合

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ t で 2 階微分

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\dfrac{d\eta}{dt} - \omega^2\xi \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\dfrac{d\xi}{dt} - \omega^2\eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_\xi/m &= \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\frac{d\eta}{dt} - \omega^2\xi \\ F_\eta/m &= \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\frac{d\xi}{dt} - \omega^2\eta \end{aligned}$$

以上により回転座標系の見かけの力（コリオリ力と遠心力）を含んだ運動方程式は

$$m\overbrace{\frac{d^2\xi}{dt^2}} = F_\xi \quad \overbrace{+2m\omega\frac{d\eta}{dt}} \quad \overbrace{+m\omega^2\xi}$$

$$m\underbrace{\frac{d^2\eta}{dt^2}}_{\text{加速度}} = F_\eta \quad \underbrace{-2m\omega\frac{d\xi}{dt}}_{\text{コリオリ力}} \quad \underbrace{+m\omega^2\eta}_{\text{遠心力}}$$